理系数学

三角比・三角関数

【日本工大・甲南大】

(1) $\tan^2 35° \sin^2 55° + \tan^2 55° \sin^2 35° + (1 + \tan^2 35°) \sin^2 55°$ の値を求めよ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{3}{5}$ とする。このとき，$\sin\theta\cos\theta = \boxed{\text{ア}}$ ，
$\sin\theta - \cos\theta = \boxed{\text{イ}}$ であり，$\tan\theta - \dfrac{1}{\tan\theta} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

【防衛医大・札幌医大】

$\triangle$ ABC の 3 つの角の大きさを A, B, C で表し，また，それらの角の対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。このとき，次の等式が成り立つ $\triangle$ ABC はどのような三角形であるか。

(1) $a\cos A = c\cos C$

(2) $\sin C = 2\cos A\sin B$

【山口大】

四角形 ABCD が円に内接しているとする。辺 DA，AB，BC，CD の長さをそれぞれ a, b, c, d で表し，$\angle\mathrm{DAB} = \theta$ とおく。また，四角形 ABCD の面積を T とする。

(1) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos\theta$ が成り立つことを示せ。

(2) $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ が成り立つことを示せ。

ただし，$s = \dfrac{1}{2}(a + b + c + d)$ とする。

【山口大】

四面体 ABCD を考える。△ BCD は 1 辺の長さが 2 の正三角形であり，

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{AD} = 3$ とする。また，線分 AB 上に点 E をとり，$\mathrm{AE} = m$ とする。

(1) $\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ。

(2) 線分 EC，ED の長さを m を用いて表せ。

(3) 点 E を点 A から点 B まで動かしたときの △ ECD の面積の最小値と，そのときの m の値を求めよ。

(4) m の値を (3) で求めた値とするとき，四面体 EBCD の体積を求めよ。

【東北大】

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=1,\ \mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

(1) $\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta,\ \sin\theta$ の値を求めよ。

(2) 実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

【福岡大・和歌山大】

(1) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ とする。方程式 $1 + \cos x - \sin x - \tan x = 0$ を満たす x の値は $\boxed{}$ であり，不等式 $|\cos x - \sin x| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たす x の範囲は $\boxed{}$ である。

(2) (ア) $\sin\theta = \dfrac{1}{5}$ であるとき，$\sin 3\theta$ の値を求めよ。

(イ) $0 \leqq x \leqq \pi$ とする。このとき，

$-2\sin 3x - \cos 2x + 3\sin x + 1 \leqq 0$

を満たすような x の値の範囲を求めよ。

【芝浦工大】

k を実数の定数とする。関数

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta-2k\sin\theta-2\sqrt{3}k\cos\theta+6 \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}\right)$$

について，次の各問いに答えよ。

(1) $t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) の t を用いて，$\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta$ を t の式で表せ。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値の差が最小となるように，k の値を定めよ。

【高知大】

θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす実数とし，x の 2 次方程式 $2x^2-(4\cos\theta)x+3\sin\theta=0$ を考える。

(1) この 2 次方程式が虚数解をもつような θ の値の範囲を求めよ。

(2) この 2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。

(3) この 2 次方程式の 1 つの解が虚数解で，その 3 乗が実数であるとする。このとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

【熊本大】

正三角形 ABC が半径 1 の円に内接しているとする。P は点 A，B と異なる点で，A，B を両端とし点 C を含まない弧の上を動くものとする。

(1) $\angle PBA=\theta$ とおくとき，PA，PB，PC をそれぞれ θ を用いて表せ。また，PA+PB+PC の最大値を求めよ。

(2) $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ を求めよ。

【香川大】

1辺の長さが x の正三角形 ABC を底面，点 O を頂点とし，OA = OB = OC である三角錐 OABC に半径 1 の球が内接しているとする。ただし，球が三角錐に内接するとは，球が三角錐のすべての面に接することである。

(1) 三角錐 OABC の体積を x を用いて表せ。

(2) この体積の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

【首都大東京】

(1) 三角関数の加法定理を用いて，次の等式を示せ。

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$$

(2) N を自然数とする。次の等式を示せ。

$$(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos Nx) \times 2\sin\frac{x}{2} = \sin\left(Nx + \frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}$$

(3) $0 < x < 2\pi$ の範囲で $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ を満たす x をすべて求めよ。

【浜松医大】

(1) a，b，c を正の実数とする。このとき，不等式 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqq abc(a+b+c)$ を証明せよ。また，等号が成り立つときの a，b，c の条件を求めよ。

(2) 鋭角三角形の 3 つの内角を A，B，C とする。

(i) 等式 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ を証明せよ。

(ii) 不等式 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C} \geqq \sqrt{3}$ を証明せよ。また，等号が成り立つときの鋭角三角形の条件を求めよ。

【信州大】

n を自然数，θ を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos(n+2)\theta - 2\cos\theta\cos(n+1)\theta + \cos n\theta = 0$ を示せ。

(2) $\cos\theta = x$ とおくとき，$\cos 5\theta$ を x の式で表せ。

(3) $\cos^2\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ。

【滋賀大】

三角形 ABC において $\angle A = A$，$\angle B = B$，$\angle C = C$ とする。

(1) $\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A+B)\cos(A-B)$ が成り立つことを示せ。

(2) $1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 4\sin A \sin B \cos C$ が成り立つことを示せ。

(3) $A = B$ のとき，$1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$ の最小値を求めよ。

【中央大】

原点 O を中心とする半径 1 の円周上に 2 点 $Q(\cos a, \sin a)$，$R(\cos(a+b), \sin(a+b))$ をとる。ただし a，b は $a>0$，$b>0$，$a+b<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす。また，点 Q から x 軸へ下ろした垂線の足を点 P とし，点 R から y 軸へ下ろした垂線の足を点 S とする。$\triangle OPQ$ の面積と $\triangle ORS$ の面積の和を A，五角形 OPQRS の面積を B とおく。

(1) A を a と b で表せ。

(2) b を固定して，a を $0<a<\dfrac{\pi}{2}-b$ の範囲で動かすとき，A がとりうる値の範囲を b で表し，A が最大値をとるときの a の値を b で表せ。

(3) B は $a=\dfrac{\pi}{8}$，$b=\dfrac{\pi}{4}$ のときに最大値をとることを示せ。