理系数学

式と証明

【近畿大・筑波大・福岡大】

(1)　$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ ア$\boxed{}$，$x^3+\dfrac{1}{x^3}=$ イ$\boxed{}\sqrt{\text{ウ}\boxed{}}$，

$x^4-\dfrac{1}{x^4}=$ エ$\boxed{}\sqrt{\text{オ}\boxed{}}$ である。

(2)　$x=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}i}$ のとき，$3x^3+4x^2+3x-1$ の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

(3)　$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ とする。このとき，$\dfrac{b+c}{a}$ の値は ア$\boxed{}$ であり，

$a+b+c\neq 0$ のときの $\dfrac{a^3+b^3+c^3+6abc}{(b+c)^3}$ の値を求めると イ$\boxed{}$ である。

【金沢工大・新潟大】

(1)　$\left(x^2+\dfrac{y}{2x}\right)^6$ の展開式において，x を含まず y のみを含む項の係数 p を求めよ。

また，$\left(x^2+\dfrac{y}{2x}\right)^6(x+yz)^5$ の展開式において，$x^5y^6z^3$ の係数 q を求めよ。

(2)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。

【札幌医大】

実数 $x \geqq 0$， $y \geqq 0$， $z \geqq 0$ に対して $x+y^2=y+z^2=z+x^2$ が成り立つとする。
このとき $x=y=z$ であることを証明せよ。

【福井大】

(1)　$p>1$，$q>1$ のとき，不等式 $p+q<pq+1$ を証明せよ。

(2)　$a>1$，$b>1$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b-1}<\sqrt{a}+\sqrt{b}-1$ を証明せよ。

(3)　$a>1$，$b>1$，$c>1$ のとき，不等式 $\sqrt{a+b+c-2}<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-2$ を証明せよ。

【静岡大】

整数 n がある整数の 2 乗で表されるとき， n は平方数であるという。 2 つの平方数の和で表される整数全体の集合を A とする。例えば， $0=0^2+0^2$ より $0\in A$ であり，また，$13=2^2+3^2$ より $13\in A$ である。

(1)　整数 a， b， x， y に対して，等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

が成り立つことを示せ。

(2)　2 つの整数 α， β が A の要素であるとき，積 $\alpha\beta$ は A の要素であることを示せ。

(3)　25， 50， 1250 のそれぞれが A の要素であることを示せ。

【東京慈恵会医大・日本女子大】

次の文中の空欄にあてはまるものを，下の ①～④ のうちから 1 つ選び，記号で答えよ。

(1)　a，b は実数とする。「$a^2+b^2=2ab$」は「$a=b$」であるための ア$\boxed{}$。また，「$a+b$，ab はともに有理数」は「a，b はともに有理数」であるための イ$\boxed{}$。

(2)　△ABC において，$\cos A\cos B\cos C>0$ であることは，△ABC が鋭角三角形であるための $\boxed{}$。

(3)　a は実数とする。「$|2a+1|>1$」は「$a>0$」であるための ア$\boxed{}$。また，「$|a-1|<2$」は「$1<|a+2|<5$」であるための イ$\boxed{}$。

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが，十分条件ではない

③ 十分条件であるが，必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

【小樽商科大】

$0 \leqq n \leqq 2024$ を満たす整数 n に対し，$(x+6)^{2024}$ の展開式における x^n の係数を a_n とする。

(1)　二項定理を用いて，a_n を n の式で表せ。

(2)　$0 \leqq k \leqq 2023$ を満たす整数 k に対し，$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ を k の式で表せ。

(3)　a_n を最大にする n の値を求めよ。

【群馬大】

(1)　201^{20} の十億の位の数字を求めよ。

(2)　201^{20} を 4×10^{7} で割ったときの余りを求めよ。

【東京医歯大】

a，b，c を相異なる正の実数とする。

(1)　次の 2 数の大小を比較せよ。

a^3+b^3，a^2b+b^2a

(2)　次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$，$(a+b+c)(ab+bc+ca)$，$3(a^3+b^3+c^2)$，$9abc$

(3)　x，y，z を正の実数とするとき $\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

【大阪大】

(1)　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。

(2)　p，q，$\sqrt{2}\,p+\sqrt[3]{3}\,q$ がすべて有理数であるとする。そのとき，$p=q=0$ であることを示せ。