理系数学

関数と方程式・不等式

【南山大】

(1)　a，b は $a<b$ を満たす定数とする。座標平面において，2 次関数 $y=ax^2+b$ のグラフが点 $(1,\ 10)$ を通り，直線 $y=-8x$ と点 $(c,\ d)$ で接するとき，b，d の値を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2-6x+11$ を C_1 とし，C_1 を原点に関して対称移動して得られる放物線を C_2 とする。C_2 の方程式は ${}^{ア}\boxed{}$ である。また，C_2 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる放物線を C_3 とする。C_3 の頂点が C_1 上にあるとき，q を p で表すと $q={}^{イ}\boxed{}$ である。

【島根大】

(1)　xy 平面上に，x の 2 次関数 $y=-x^2+ax+2a-3$ のグラフがある。このグラフが $0 \leqq x \leqq 2$ において x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもつとき，a の値の範囲は $\boxed{}$ である。

(2)　放物線 $y=x^2-4x+3$ が直線 $y=3x+k$ から切り取る線分の長さが $\sqrt{5}$ であるとき，k の値を求めよ。

【星薬大・東京理科大】

(1)　a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-ax-a^2\ (0 \leqq x \leqq 4)$ について，$f(x)$ の最大値が 11 となるとき，a の値は $-$ ア$\boxed{}$，イ$\boxed{}$ である。

(2)　a を実数の定数とし，x の関数 $f(x)=ax^2+4ax+a^2-1$ を考える。区間 $-4 \leqq x \leqq 1$ における関数 $f(x)$ の最大値が 5 であるとき，定数 a の値を求めよ。

【岡山大】

a を実数とする。x の 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3)　a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

【松山大】

実数 x， y が $x^2+2xy+y^2+x+y-20=0$ を満たすとき， xy は $x=\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}^{イ}\boxed{}}$，

$y=\dfrac{{}^{ウ}\boxed{}}{{}^{エ}\boxed{}}$ で最大値 $\dfrac{{}^{オ}\boxed{}}{{}^{カ}\boxed{}}$ となり， $3x^2+y^2$ は $x={}^{キ}\boxed{}$， $y={}^{ク}\boxed{}$ で最小値 ${}^{ケ}\boxed{}$ となる。

【広島工大】

a， b を定数とし， $a<0$ とする。 $-1 \leqq x \leqq 2$ を定義域とする 2 次関数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ の最大値は 12，最小値は 0 である。

また， t を $-1<t \leqq 1$ を満たす実数とし，座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$， $\mathrm{Q}(t+1,\ 0)$， $\mathrm{R}(t+1,\ f(t+1))$， $\mathrm{S}(t,\ f(t))$ をとる。さらに，四角形 PQRS の面積を $g(t)$ とする。

(1)　定数 a， b を求めよ。

(2)　関数 $g(t)$ を求めよ。

(3)　関数 $g(t)$ の最大値およびそのときの t の値を求めよ。

【同志社大】

関数 $f(x)=|x^2-9|-3|x-2|-2$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　k を実数とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数を求めよ。

【富山大】

2次方程式 $x^2+Ax+B=0$ の2つの解 α，β は $\alpha \fallingdotseq 0$，$\beta \fallingdotseq 0$，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=2$，$\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}=3$ を満たすとする。このとき，A，B の値を求めよ。

【芝浦工大・自治医大】

(1)　a，b を実数とする。x の 3 次方程式 $x^3+ax^2+9x+b=0$ の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，この 3 次方程式の実数解は $\boxed{}$ である。ただし，i は虚数単位を表す。

(2)　3 次方程式 $x^3+(2a^2-1)x^2-(5a^2-4a)x+3a^2-4a=0$ (a は実数) が次数の 2 重解をもつとき，a のとりうる値の和を求めよ。

【静岡大】

実数 x， y， z が次の 3 つの等式 $x+y+z=0$， $x^3+y^3+z^3=3$， $x^5+y^5+z^5=15$ を満たしている。 $x^2+y^2+z^2=a$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $xy+yz+zx$ を a を用いて表せ。

(2) xyz の値を求めよ。

(3) a の値を求めよ。

【中京大】

a を実数の定数とし，関数

$$f(x)=x^2-6x+11\ ,\quad g(x)=-x^2+2ax-a^2+a$$

を考える。

(1)　$a=4$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフを 1 つの xy 平面上に図示せよ。

(2)　すべての実数 x に対して $f(x) \geqq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

(3)　すべての実数 α ，β に対して $f(\alpha) \geqq g(\beta)$ が成り立つような α の値の範囲を求めよ。

【摂南大】

a を正の定数とする。$2x^2-5ax+3a^2 \leqq 0$ と $x^2-3x+2<0$ をともに満たす x が存在する定数 a の値の範囲は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}^{イ}\boxed{}} < a < {}^{ウ}\boxed{}$ である。また，$2x^2-5ax+3a^2 \leqq 0$ を満たすすべての x について $x^2-3x+2<0$ が成り立つ定数 a の値の範囲は ${}^{エ}\boxed{} < a < \dfrac{{}^{オ}\boxed{}}{{}^{カ}\boxed{}}$ である。

【東京慈恵会医大】

実数 x， y が $|2x+y|+|2x-y|=4$ を満たすとき， $2x^2+xy-y^2$ のとりうる値の範囲は
${}^{ア}\boxed{} \leqq 2x^2+xy-y^2 \leqq {}^{イ}\boxed{}$ である。

【関西学院大】

k は実数とし， x の関数 $y=x^2+2x-4|x|+k$ …… ① を考える。

(1)　$k=0$ のとき，関数 ① の最小値は ${}^{ア}\boxed{}$ である。

(2)　方程式 $y=0$ が異なる 4 つの実数解をもつとき， k のとりうる値の範囲は ${}^{イ}\boxed{}$ である。このとき， 2 番目に小さい解を α とすると， α のとりうる値の範囲は ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

【中央大】

実数 x に対し，$n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を記号 $[x]$ で表す。例えば $[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\sqrt{5}]-2$ である。

(1)　関数 $y=[x]$ ($0 \leqq x < 3$) のグラフをかけ。

(2)　b を定数とする。直線 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ と (1) のグラフが共有点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(3)　関数 $y=x[x]$ ($0 \leqq x < 3$) のグラフをかけ。

(4)　a を正の定数とする。曲線 $y=ax^2+\dfrac{5}{2}$ と (3) のグラフが相異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

【早稲田大】

実数全体の集合を定義域とする定数関数でない x の関数 $f(x)$ が，次の条件

　すべての実数 x に対して，$f(-x)=-f(x)$，$f(1+x)=f(1-x)$

を満たしている。このとき，次の条件

　すべての実数 x に対して，$f(x+m)=f(x)$

を満たすような正の整数 m の最小値は $\boxed{}$ である。

【慶応大】

実数 x， y が $x^3+y^3+xy-3=0$ を満たすとする。 $s=x+y$， $t=xy$ とおくと， t は s を用いて $t=$ ${}^{ア}\boxed{}$ と表せる。更にこのとき s のとりうる値の範囲は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

【星薬大】

i を虚数単位，k を実数とするとき、3 次方程式 $2x^3-(6k+3i)x^2-\dfrac{4}{3}x-9+2i=0$ が 2 つの異なる実数解をもつための必要十分条件は $k=-\dfrac{ア\boxed{}}{イ\boxed{}}$ であり，その 2 つの実数解は $x=\pm\dfrac{\sqrt{ウ\boxed{}}}{エ\boxed{}}$ である。

【東京慈恵会医大】

xの2次不等式

$$6x^2-(16a+7)x+(2a+1)(5a+2)<0$$

を満たす整数xが10個となるように，正の整数aの値を定めよ。